Dimension du commutant

Théorème : $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[A] = C(A) \iff \chi_A = \mu_A$.

On a toujours $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \mu_A$ via $ev_A : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[A]$, $P \mapsto P(A)$ de noyau (μ_A).

Donc par Cayley-Hamilton, $\dim \mathbb{K}[A] \leq n$.

Lemme : $\dim C(A) \geq n$.

· Si A est trigonalisable, alors on peut la supposer triangulaire supérieure. Si X est aussi triangulaire supérieure et $X \in C(A)$, alors on écrit $\frac{n(n+1)}{2}$ équations pour les $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues X_{ij}. Or pour la diagonale, ce sont $a_{ii} X_{ii} - X_{ii} a_{ii} = 0$ qui sont triviales, donc il y a $\frac{n(n+1)}{2} - n$ équations. L'espace de solutions est donc de dimension $\geq n$: $\dim (C(A) \cap T_n(\mathbb{K})) \geq n$.

En particulier, $\dim (C(A)) \geq n$.

· Sinon, on se place dans une extension L de $\mathbb{K}$, de sorte que χ_A soit scindé, A trigonalisable. Montrons que $\dim(C(A))$ est invariante.

On note $(a_1, \dots, a_p)$ une $\mathbb{K}$-base de L, $M_1, \dots, M_r$ une base de $C(A)$. Mq $M_1, \dots, M_r$ est une L-base de $C_L(A) = \{X \in M_n(\underline{\underline{L}}), AX = XA\}$.

* Liberté : Si $\sum_{i=1}^r \lambda_i M_i = 0$ avec $\lambda_i \in L$, alors $\lambda_i = \sum_{k=1}^p \mu_{ik} a_k$ et $\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^p \mu_{ik} a_k M_i = \sum_{k=1}^p a_k \left(\sum_{i=1}^r \mu_{ik} M_i\right) = 0$ donc par liberté :

$\forall k, \sum_{i=1}^r \mu_{ik} M_i = 0$ puis $\forall i, \mu_{ik} = 0$ donc $\lambda_i = 0$

* Génér. : Soit $X = (x_{ij}) \in C_L(A)$. Montrons que $X \in \mathrm{Vect}_L(M_1, \dots, M_r)$.

$\forall i,j$, $x_{ij} = \sum_{k=1}^p \mu_{ij}(k) a_k$ car (a_k) $\mathbb{K}$-base. Notons $\mu(k) = (\mu_{ij}(k)) \in M_n(\mathbb{K})$

$AX = XA$ assure $\forall i,j$, $\sum_{l=1}^n a_{il} x_{lj} = \sum_{l=1}^n x_{il} a_{lj}$

$$\sum_{k=1}^p a_k \left(\sum_{l=1}^n a_{il} \mu_{lj}(k)\right) = \sum_{k=1}^p a_k \left(\sum_{l=1}^n \mu_{il}(k) a_{lj}\right)$$

donc : $\sum_{k=1}^p a_k (A\mu(k) - \mu(k)A) = 0$, $\mu(k) \in C(A)$ par liberté de (a_k)

donc $\mu(k) \in \mathrm{Vect}_L(M_1, \dots, M_r)$ donc $X = \sum_{k=1}^p \mu(k) a_k \in \mathrm{Vect}_L(M_1, \dots, M_r)$.

· Si $\mathbb{K}[A] = C(A)$, alors $\deg \mu_A = \dim \mathbb{K}[A] = \dim C(A) = n$ et puisque $\mu_A | \chi_A$, unitaires, $\mu_A = \chi_A$.

· Si $\mu_A = \chi_A$, alors $(*)$ $\exists x \in \mathbb{K}$, $\mu_x = \mu_A = \chi_A$ où $(\mu_x) = \{P \in \mathbb{K}[X], P(A)(x) = 0\}$

La famille $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ est libre (sinon, on aurait un annulateur de x de degré $< n$ qui contredirait la "minimalité" de μ_x) donc une base.

Posons $\varphi : B \in C(A) \mapsto Bx$. φ est linéaire et injective.

Si $Bx = 0$, alors $\forall k$, $BA^k x = A^k Bx = 0$ donc $B = 0$ (nul sur une base)

Par injectivité, $\dim C(A) \leq \dim \mathbb{K}^n = n$

Donc $\dim C(A) = n, = \deg(\chi_A) = \deg \mu_A = \dim \mathbb{K}[A]$.

Puisque $\mathbb{K}[A] \subset C(A)$, il y a égalité : $\mathbb{K}[A] = C(A)$.

(*) Lemme : $\forall x \in \mathbb{K}$, μ_x engendre $\{P \in \mathbb{K}[X], P(A)(x) = 0\}$.

$\exists x \in \mathbb{K}$, $\mu_A = \mu_x$

$PAP^{-1} X = X PAP^{-1}$

${}^t A Y = Y A$